

SPIS RZECZY

Rozdział VIII

FUNKCJA PIERWOTNA (CAŁKA NIEOZNACZONA)

§ 1. Całka nieoznaczona i najprostsze sposoby jej obliczania

263. Pojęcie funkcji pierwotnej (całki nieoznaczonej)	5
264. Całka i obliczanie pola	8
265. Tablica całek podstawowych	10
266. Najprostsze reguły całkowania	11
267. Przykłady	12
268. Całkowanie przez podstawienie	15
269. Przykłady	18
270. Całkowanie przez części	22
271. Przykłady	23

§ 2. Całkowanie funkcji wymiernych

272. Sformułowanie zagadnienia o całkowaniu w postaci skończonej	26
273. Ułamki proste i ich całkowanie	27
274. Rozkład ułamków właściwych na ułamki proste	28
275. Wyznaczenie współczynników	31
276. Wydzielenie części wymiernej całki	33
277. Przykłady	36

§ 3. Całkowanie pewnych wyrażeń zawierających pierwiastki

278. Całkowanie wyrażeń postaci $R\left(x, \sqrt[m]{\frac{\alpha x + \beta}{\alpha x + \delta}}\right)$	38
279. Całkowanie różniczek dwumiennych. Przykłady	40
280. Wzory redukcyjne	42
281. Całkowanie wyrażeń postaci $R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})$. Podstawienia Eulera	44
282. Geometryczna interpretacja podstawień Eulera	47
283. Przykłady	48
284. Inne sposoby obliczania	53
285. Przykłady	59

§ 4. Całkowanie wyrażeń zawierających funkcje trygonometryczne i funkcję wykładniczą

286. Całkowanie różniczek $R(\sin x, \cos x) dx$	61
287. Całkowanie wyrażeń $\sin^y x \cos^u x$	63
288. Przykłady	65
289. Przegląd innych przypadków	69

§ 5. Całki eliptyczne

290. Uwagi ogólne i definicje	70
291. Przekształcenia pomocnicze	72
292. Sprowadzenie do postaci kanonicznej	74
293. Całki eliptyczne, pierwszego, drugiego i trzeciego rodzaju	76

Rozdział IX

CAŁKA OZNACZONA

§ 1. Definicja i warunki istnienia całki oznaczonej

294. Inne podejście do zadania o polu	80
295. Definicja	81
296. Sumy Darboux	83
297. Warunek istnienia całki	85
298. Klasy funkcji całkowlanych	87
299. Własności funkcji całkowlanych	88
300. Przykłady i uzupełnienia	90
301. Całki górna i dolna jako granice	91

§ 2. Własności całek oznaczonych

302. Całka w przedziale zorientowanym	93
303. Własności całek wyrażające się równościami	94
304. Własności wyrażające się nierównościami	95
305. Całka oznaczona jako funkcja górnej granicy	99
306. Drugie twierdzenie o wartości średniej	101

§ 3. Obliczanie i przekształcanie całek oznaczonych

307. Obliczenie za pomocą sum całkowych	103
308. Podstawowy wzór rachunku całkowego	106
309. Przykłady	107
310. Inne wyprowadzenie wzoru podstawowego	110
311. Wzory redukcyjne	111
312. Przykłady	112
313. Wzór na zamianę zmiennej w całce oznaczonej	115
314. Przykłady	116
315. Wzór Gaussa. Przekształcenie Landena	121
316. Inne wyprowadzenie wzoru na zamianę zmiennej	124

§ 4. Niektóre zastosowania całek oznaczonych

317. Wzór Wallisa	125
318. Wzór Taylora z resztą w postaci całki	126
319. Przystępność liczby e	126
320. Wielomiany Legendre'a	128
321. Nierówności całkowite	130

§ 5. Przybliżone obliczanie całek oznaczonych

322. Postawienie zadania. Metoda prostokątów i metoda trapezów	132
323. Interpolacja paraboliczna	134

324. Rozdrobnienie przedziału całkowania	136
325. Błąd dla wzoru prostokątów	137
326. Błąd dla wzoru trapezów	139
327. Błąd dla wzoru Simpsona	139
328. Przykłady	141

Rozdział X

ZASTOSOWANIA RACHUNKU CAŁKOWEGO DO GEOMETRII,
MECHANIKI I FIZYKI

1. Długość krzywej

329. Obliczanie długości krzywej	145
330. Inne podejście do definicji długości krzywej i jej obliczania	147
331. Przykłady	149
332. Równania naturalne krzywej płaskiej	155
333. Przykłady	157
334. Długość łuku krzywej przestrzennej	160

2. Pole i objętość

335. Definicja pola. Własność addytywności	161
336. Pole jako granica	162
337. Klasy obszarów mierzalnych	164
338. Wyrażenie pola za pomocą całki	166
339. Przykłady	168
340. Definicja i własności pojęcia objętości	173
341. Klasy brył mających objętości	175
342. Wyrażenie objętości za pomocą całki	176
343. Przykłady	179
344. Pole powierzchni obrotowej	184
345. Przykłady	186
346. Pole powierzchni walcowej	188
347. Przykłady	189

3. Obliczanie wielkości mechanicznych i fizycznych

348. Schemat stosowania całki oznaczonej	192
349. Znajdowanie momentów statycznych i środka ciężkości krzywej	194
350. Przykłady	196
351. Wyznaczanie momentów statycznych i środka ciężkości figury płaskiej	197
352. Przykłady	198
353. Praca	199
354. Przykłady	200
355. Praca siły tarcia czopa płaskiego	202
356. Zadania na sumowanie elementów nieskończenie małych	204

4. Najprostsze równania różniczkowe

357. Pojęcia podstawowe. Równania pierwszego rzędu	208
358. Równanie stopnia pierwszego względem pochodnej. Rozdzielanie zmiennych	209
359. Zadania	212
360. Uwagi o układaniu równań różniczkowych	216
361. Zadania	217

Rozdział XI
SZEREGI NIESKOŃCZONE O WYRAZACH STAŁYCH

§ 1. Wstęp

362.	Pojęcia podstawowe	221
363.	Przykłady	222
364.	Podstawowe twierdzenia	224

§ 2. Zbieżność szeregów o wyrazach dodatnich

365.	Warunek zbieżności szeregu o wyrazach dodatnich	225
366.	Twierdzenia o porównywaniu szeregów	227
367.	Przykłady	229
368.	Kryteria zbieżności Cauchy'ego i d'Alemberta	233
369.	Kryteria Raabe'go	234
370.	Przykłady	236
371.	Kryterium Kummera	239
372.	Kryterium Gaussa	241
373.	Kryterium całkowite Maclaurina-Cauchy'ego	242
374.	Kryterium Jermakowa	246
375.	Uzupełnienia	248

§ 3. Zbieżność szeregów dowolnych

376.	Ogólny warunek zbieżności szeregu	252
377.	Zbieżność bezwzględna	254
378.	Przykłady	256
379.	Szereg potęgowy i jego przedział zbieżności	258
380.	Wyrażenie promienia zbieżności przez współczynniki	260
381.	Szeregi naprzemienne	262
382.	Przykłady	264
383.	Przekształcenie Abela	266
384.	Kryteria Abela i Dirichleta	268
385.	Przykłady	270

§ 4. Własności szeregów zbieżnych

386.	Prawo łączności	274
387.	Prawo przemienności szeregów bezwzględnie zbieżnych	276
388.	Przypadek szeregów zbieżnych warunkowo	278
389.	Mnożenie szeregów	280
390.	Przykłady	282
391.	Ogólne twierdzenie z teorii granic	284
392.	Dalsze twierdzenia o mnożeniu szeregów	286

§ 5. Szeregi iterowane i podwójne

393.	Szeregi iterowane	290
394.	Szeregi podwójne	292
395.	Przykłady	294
396.	Szereg potęgowy dwóch zmiennych; obszar zbieżności	296
397.	Przykłady	298
398.	Szeregi wielokrotne	300

§ 6. Iloczyny nieskończone

399. Pojęcia podstawowe	302
400. Przykłady	303
401. Twierdzenia podstawowe. Związek z szeregami	304
402. Przykłady	307

§ 7. Rozwinięcia funkcji elementarnych

403. Rozwinięcie funkcji w szereg potęgowy. Szereg Taylora	314
404. Rozwinięcie w szereg funkcji wykładniczej, funkcji trygonometrycznych i innych	316
405. Szereg logarytmiczny	318
406. Wzór Stirlinga	319
407. Szereg dwumienny	321
408. Rozwinięcie kosinusa i sinusa w iloczyn nieskończony	323

§ 8. Rachunki przybliżone za pomocą szeregów. Przekształcanie szeregów

409. Uwagi ogólne	327
410. Obliczenie liczby π	328
411. Obliczanie logarytmów	329
412. Obliczanie pierwiastków	331
413. Przekształcanie szeregów potęgowych według Eulera	333
414. Przykłady	334
415. Przekształcanie Kummera	336
416. Przekształcanie Markowa	339

§ 9. Sumowanie szeregów rozbieżnych

417. Wstęp	341
418. Metoda szeregów potęgowych	342
419. Twierdzenie Taubera	345
420. Metoda średnich arytmetycznych	347
421. Wzajemny stosunek metod Poissona-Anela i Cesary	348
422. Twierdzenie Hardy'ego-Landaua	350
423. Zastosowanie sumowania uogólnionego do mnożenia szeregów	351
424. Inne metody sumowania uogólnionego szeregów	353
425. Przykłady	357
426. Ogólna klasa liniowych, regularnych metod sumowania	359

Rozdział XII

CIĄGI I SZEREGI FUNKCYJNE

§ 1. Zbieżność jednostajna

427. Uwagi wstępne	362
428. Zbieżność jednostajna i niejednostajna	364
429. Warunek jednostajnej zbieżności	368
430. Kryteria jednostajnej zbieżności szeregów	369

§ 2. Własności funkcyjne sumy szeregu

431. Ciągłość sumy szeregu	371
432. Uwaga o zbieżności quasi-jednostajnej	374
433. Przejście do granicy wyraz za wyrazem	375

434. Całkowanie szeregów wyraz za wyrazem	376
435. Różniczkowanie szeregów wyraz za wyrazem	378
436. Przeniesienie wyników na ciągi	381
437. Ciągłość sumy szeregu potęgowego	383
438. Całkowanie i różniczkowanie szeregów potęgowych	386
§ 3. Zastosowania	
439. Przykłady na ciągłość sumy szeregu i przejście do granicy wyraz za wyrazem	389
440. Przykłady całkowania szeregów	394
441. Przykłady na różniczkowanie szeregu wyraz za wyrazem	403
442. Metoda kolejnych przybliżeń w teorii funkcji uwikłanych	409
443. Analityczna definicja funkcji trygonometrycznych	411
444. Przykład funkcji ciągłej bez pochodnej	413
§ 4. Dodatkowe wiadomości o szeregach potęgowych	
445. Działania na szeregach potęgowych	415
446. Superpozycja szeregów	418
447. Przykłady	420
448. Dzielenie szeregów potęgowych	424
449. Liczby Bernoulliego i rozwinięcia, w których występują	426
450. Rozwiązywanie równań za pomocą szeregów	430
451. Odwrócenie szeregu potęgowego	433
452. Szereg Lagrange'a	436
§ 5. Elementarne funkcje zmiennej zespolonej	
453. Liczby zespolone	439
454. Ciąg liczb zespolonych i jego granica	441
455. Funkcje zmiennej zespolonej	443
456. Szeregi potęgowe	445
457. Funkcja wykładnicza	448
458. Funkcja logarymiczna	449
459. Funkcje trygonometryczne i ich funkcje odwrotne	451
460. Funkcja potęgowa	455
461. Przykłady	456
§ 6. Szeregi oscylujące i szeregi asymptotyczne. Wzory Eulera-Maclaurina	
462. Przykłady	459
463. Definicje	462
464. Podstawowe własności rozwinięć asymptotycznych	464
465. Wyprowadzenie wzoru Eulera-Maclaurina	467
466. Badanie reszty	469
467. Przykłady obliczeń z zastosowaniem wzoru Eulera-Maclaurina	471
468. Inna postać wzoru Eulera-Maclaurina	474
469. Wzór i szereg Stirlinga	476
Rozdział XIII	
CAŁKI NIEWŁAŚCIWE	
§ 1. Całki niewłaściwe o granicach nieskończonych	
470. Definicja całki o granicach nieskończonych	478
471. Zastosowanie podstawowego wzoru rachunku całkowego	480

472. Przykłady	480
473. Analogia z szeregami. Najprostsze twierdzenia	483
474. Zbieżność całki w przypadku funkcji dodatniej	484
475. Zbieżność całki w przypadku ogólnym	486
476. Kryteria Abela i Dirichleta	487
477. Sprowadzenie całki niewłaściwej do szeregu nieskończonego	490
478. Przykłady	492
§ 2. Całki niewłaściwe z funkcji nieograniczonych	
479. Definicja całki z funkcji nieograniczonej	499
480. Uwaga o punktach osobliwych	501
481. Zastosowanie podstawowego wzoru rachunku całkowego. Przykłady	502
482. Warunki i kryteria istnienia całki	504
483. Przykłady	507
484. Wartości główne całek niewłaściwych	510
485. Uwaga o wartościach uogólnionych całek rozbieżnych	513
§ 3. Własności i przekształcanie całek niewłaściwych	
486. Najprostsze własności	515
487. Twierdzenie o wartości średniej	517
488. Całkowanie przez części w przypadku całek niewłaściwych	518
489. Przykłady	519
490. Zamiana zmiennych w całkach niewłaściwych	520
491. Przykłady	521
§ 4. Specjalne metody obliczania całek niewłaściwych	
492. Pewne ważne całki	526
493. Obliczenie całek niewłaściwych za pomocą sum całkowych. Przypadek skończonych granic całkowania	529
494. Całki w przedziale nieskończonym	530
495. Całki Froullaniego	534
496. Całki z funkcji wymiernych w granicach nieskończonych	536
497. Mieszane przykłady i ćwiczenia	541
§ 5. Przybliżone obliczanie całek niewłaściwych	
498. Całki o skończonych granicach całkowania; wydzielenie osobliwości	552
499. Przykłady	552
500. Uwaga o przybliżonym obliczaniu całek właściwych	555
501. Przybliżone obliczanie całek niewłaściwych w przedziale nieskończonym	556
502. Wykorzystanie rozwinięć asymptotycznych	558

Rozdział XIV

CAŁKI ZALEŻNE OD PARAMETRU

§ 1. Teoria elementarna

503. Sformułowanie zagadnienia	562
504. Zbieżność jednostajna do funkcji granicznej	562
505. Przetawienie dwóch przejść do granicy	565
506. Przejście do granicy pod znakiem całki	566
507. Różniczkowanie pod znakiem całki	568

508. Całkowanie pod znakiem całki	570
509. Przypadek, gdy granice całki także zależą od parametru	572
510. Wprowadzenie czynnika zależnego tylko od x	573
511. Przykłady	575
512. Dowód Gaussa podstawowego twierdzenia algebry	584
§ 2. Zbieżność jednostajna całek	
513. Definicja całki zbieżnej jednostajnie	586
514. Kryterium zbieżności jednostajnej. Związek z szeregiami	587
515. Warunki dostateczne zbieżności jednostajnej	588
516. Drugi przypadek zbieżności jednostajnej	590
517. Przykłady	591
§ 3. Wykorzystanie zbieżności jednostajnej całek	
518. Przejście do granicy pod znakiem całki	595
519. Przykłady	598
520. Ciągłość i różniczkowalność całki względem parametru	609
521. Całkowanie całki względem parametru	612
522. Zastosowanie do obliczania niektórych całek	615
523. Przykłady różniczkowania pod znakiem całki	620
524. Przykłady całkowania pod znakiem całki	629
§ 4. Uzupełnienia	
525. Lemat Arzeli	637
526. Przejście do granicy pod znakiem całki	638
527. Różniczkowanie pod znakiem całki	641
528. Całkowanie pod znakiem całki	642
§ 5. Całki Eulera	
529. Całka Eulera pierwszego rodzaju	643
530. Całka Eulera drugiego rodzaju	645
531. Najprostsze własności funkcji Γ	646
532. Jednoznaczne określenie funkcji Γ na podstawie własności	652
533. Inna charakterystyka funkcyjna funkcji	653
534. Przykłady	655
535. Pochodna logarymiczna funkcji Γ	660
536. Twierdzenie o mnożeniu funkcji Γ	662
537. Niektóre rozwinięcia w szeregi i iloczyny	664
538. Przykłady i uzupełnienia	665
539. Obliczanie pewnych całek oznaczonych	671
540. Wzór Stirlinga	678
541. Obliczenie stałej Eulera	681
542. Układanie tablicy logarytmów dziesiętnych funkcji Γ	682
Skorowidz	684